

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Геометрия инцидентов и полиномиальный метод
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 03.03.2023

## Аннотация

Курс посвящен геометрии инцидентий. Эта область дискретной и вычислительной геометрии активно развивалась в 80-90е годы прошлого века, во многом за счёт вероятностных методов. Затем в 10е годы этого века она получила неожиданный толчок к развитию благодаря методам, пришедшим из алгебраической геометрии. Ключевым результатом нового витка развития области стала теорема Гута и Каца о числе различных расстояний между  $n$  точками на плоскости. Изложить доказательство этой теоремы является одной из целей курса. Помимо этого, мы разберемся с несколькими другими алгебраическими и вероятностными техниками и важными результатами из области (nite Kakeya problem, capsets).

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- изучить спектр идей из алгебры и алгебраической геометрии, который нашел применение в задачах комбинаторной геометрии, например в задаче о числе различных расстояний на плоскости.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области комбинаторной геометрии;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в данной области.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, геометрии инцидентий;
- современные проблемы соответствующих разделов геометрии инцидентий и полиномиального метода;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Лемма о пересечениях		8		4
2	Оценки числа различных расстояний		8		4
3	Теорема Ковари-Шош-Турана и Семереди-Троттера		8		4
4	Нужные инструменты из алгебраической геометрии		8		4
5	Дистанционные графы в больших размерностях		8		4
6	Понижение степени в полиномиальных разрезаниях. Различные задачи		8		4
7	Теорема Гута-Каца		12		6
Итого часов			60		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

###### 1. Лемма о пересечениях

Лемма о пересечениях. Вывод теоремы Семереди-Троттера и верхняя оценка числа единичных расстояний.

###### 2. Оценки числа различных расстояний

Оценки числа различных расстояний. Конструкции множеств с большим числом единичных расстояний / малым числом различных расстояний. Применения к аддитивной комбинаторике.

###### 3. Теорема Ковари-Шош-Турана и Семереди-Троттера

Теорема Ковари-Шош-Турана и вывод теоремы Семереди-Троттера.

#### 4. Нужные инструменты из алгебраической геометрии

Теорема Безу, теорема. Паскаля. Полиномиальные разрезания, теорема о бутерброде. Применение к теореме Семереди-Троттера и ее обобщениям. Вероятностные (классические) разрезания.

#### 5. Дистанционные графы в больших размерностях

Дистанционные графы в больших размерностях. Применение к оценке числа ребер в дистанционном графе без больших полных двудольных подграфов. Гипотеза Эрдеша-Пёрди.

#### 6. Понижение степени в полиномиальных разрезаниях. Различные задачи

Задача о сочленениях в  $R^3$ . Задача Какея над конечными полями Slice rank и задача о множествах без арифметических прогрессий в  $Z^n$

#### 7. Теорема Гута-Каца

Теорема Гута-Каца о числе различных расстояний на плоскости.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2, Информационные модели / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ, 2016
2. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : учебник для вузов / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Физматлит, 2004 .— 304 с.

#### Дополнительная литература

1. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Журавлев, Ю. А. Флеров, О. С. Федько ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 248 с.

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

### 8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

### 9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**по направлению:** Прикладная математика и информатика  
**профиль подготовки:** Прикладная математика и информатика  
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики  
кафедра дискретной математики  
**курс:** 2  
**квалификация:** магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.Б. Купавский, д-р физ.-мат. наук, профессор

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-6 Способен определять и реализовывать приоритеты собственной деятельности и способы ее совершенствования на основе самооценки	УК-6.1 Умеет решать задачи собственного личностного и профессионального развития, определять и реализовывать приоритеты совершенствования собственной деятельности
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
ОПК-2 Способен совершенствовать и реализовывать новые математические методы решения прикладных задач	ОПК-2.2 Способен оценить актуальность и практическую значимость прикладных математических исследований в своей профессиональной области
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Геометрия инцидентов и полиномиальный метод» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, геометрии инцидентов;
- современные проблемы соответствующих разделов геометрии инцидентов и полиномиального метода;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов комбинаторной геометрии;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Пример задач для контрольной работы  
(Контрольная работа дается на паре)

1. Пусть дано множество  $A$  действительных чисел. Определим  $A + AA = \{a + bc : a, b, c \in A\}$ . Докажите, что  $|A + AA| = \Omega(n^{3/2})$ .
2. Докажите, что число равнобедренных треугольников, образуемых  $n$  точками на плоскости, не превосходит  $O(n^{7/3})$ .
3. (a) Докажите, что в любом множестве из  $d+2$  точек в  $\mathbb{R}^d$  есть по крайней мере 2 различных расстояния.

(б) Постройте в  $R^d$  множество из по крайней мере  $(d+2)$  точек, образующих только два различных расстояния.

#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Лемма о пересечениях.
2. Теорема Семереди-Троттера (вывод).
3. Оценки числа различных расстояний. Конструкции множеств с большим и малым числом единичных расстояний.
4. Теорема Ковари-Шош-Турана.
5. Теорема Семереди-Троттера.
6. Теорема Безу.
7. Теорема Паскаля.
8. Полиномиальные разрезы.
9. Теорема о бутерброде.
10. Вероятностные (классические) разрезы.
11. Дистанционные графы в больших размерностях.
12. Понижение степени в полиномиальных разрезах. Задача о сочленениях в  $R^3$
13. Задача Какея над конечными полями.
14. Slice rank и задача о множествах без арифметических прогрессий в  $Z_n^3$
15. Теорема Гута-Каца о числе различных расстояний на плоскости.
16. Обобщения теоремы Борсука–Улама для действия групп простого порядка.
17. Топологическая теорема Тверберга и деление мер на равные части на прямой.

#### Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.